Chapitre 22

Applications linéaires en dimension finie

Dans tout le chapitre, les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie.

I Utilisation des bases, rang

1) Bases et applications linéaires :

a) Rappel : coordonnées d'un vecteur

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.
Soit $u \in E$. On appelle coordonnées de u l'unique $n-$uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tel que

$$u = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$$

Les coordonnées d'un vecteur dépendent de la base choisie (cf chapitre espaces vectoriels).

b) Caractérisation de Imf

Proposition 1

Soit f une application linéaire de E dans F et soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de E.

$$\textit{Alors } \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$$

▷ *Preuve :*

◁

Exemple
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (2x + y + 3z, 2y + 2z, x + y + 2z)$.
On peut montrer facilement que f est linéaire et on a

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(\underbrace{(2, 0, 1), (1, 2, 1), (3, 2, 2)}_{\text{images de la base canonique !}})$$

Danger ! *un piège classique...*
On obtient avec ce résultat une famille génératrice de l'image, pas forcément une base.

Les trois vecteurs de l'exemple ci dessus sont liés... (puisque le troisième est la somme des deux premiers...)

2) Rang

a) Rang d'une application linéaire

Définition 1

Soit f une application linéaire de E dans F. On appelle rang de f, noté $\mathrm{rg}(f)$ la dimension de $\mathrm{Im}\, f$.

Exemple
Toujours dans l'exemple précédent

$$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(\underbrace{(2,0,1),(1,2,1),(3,2,2)}_{\text{liée}}) = \mathrm{Vect}(\underbrace{(2,0,1),(1,2,1)}_{\text{base}})$$

Ainsi l'image de f est de dimension 2, donc $\mathrm{rg}(f) = 2$.

Proposition 2

Le rang de f est le rang de la famille de vecteurs images par f d'une base de E (quelle que soit la base choisie).

▷ *Preuve* : Le rang d'une famille de vecteurs est la dimension de l'espace engendré par ces vecteurs. Comme $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$, l'égalité est immédiate. ◁

A noter : *lien entre les définitions du rang*
Le rang de f est aussi le rang du système obtenu quand on calcule le noyau. La fin de ce chapitre est consacrée à ce lien, mais on peut l'utiliser dès maintenant.

b) Théorème du rang

Théorème 1 (*Théorème du rang*)

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On a :

$$\dim(\ker f) + \mathrm{rg}(f) = \dim(E)$$

▷ *Preuve* :

◁

Exemple :
Toujours avec $f(x, y, z) = (2x + y + 3z, 2y + 2z, x + y + 2z)$, on a montré que $\text{rg}(f) = 2$.
Comme $\dim(E) = 3$, on en déduit que $\dim(\ker f) =$
Trouvons une base de $\ker f$:

c) Cas particulier des formes linéaires

Rappel : On dit que f est une forme linéaire si $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, autrement dit si les images de f sont des scalaires.

Définition 2

Soit E un espace vectoriel de dimension n. On appelle hyperplan de E tout sous espace vetoriel de dimension $n-1$

Proposition 3

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire non nulle avec E de dimension n. Alors $\ker f$ est un hyperplan

▷ *Preuve :*

◁

Exemple :
Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y - z - t = 0\}$. Alors $F = \ker f$ où $f(x, y, z, t) = x + y - z - t$. Ainsi F est un hyperplan (donc de dimension 3).

d) Quelques utilisations du rang :

Proposition 4

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $r = \mathrm{rg}(f)$.

1. *f injective $\Leftrightarrow r = \dim(E)$*
2. *f surjective $\Leftrightarrow r = \dim(F)$*
3. *f bijective $\Leftrightarrow r = \dim(E) = \dim(F)$*

▷ *Preuve :*

◁

Corollaire 1 (*Equivalence des notions !*)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\dim(E) = \dim(F)$
Alors f injective $\Leftrightarrow$ f surjective $\Leftrightarrow$ f bijective .

Enfin, on peut traduire la proposition ci-dessus par :

Proposition 5

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots e_p)$ une base de E. On note $f(\mathcal{B})$ la famille $(f(e_1), \dots, f(e_p))$. On a alors les résultats suivants :

1. *f injective si et seulement si $f(\mathcal{B})$ est libre.*
2. *f est surjective si et seulement si $f(\mathcal{B})$ est génératrice de F*
3. *f est bijective si et seulement si $f(\mathcal{B})$ est une base de F.*

▷ *Preuve :*
Montrons la première, les autres se montrent de la même manière :

◁

Exemple
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $f(x, y) = (x - y, x + y)$.

II Représentation matricielle

1) Notation matricielle

a) Matrice d'un vecteur dans une base

Définition 3

Soit u un vecteur d'un espace vectoriel E muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_p$ les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$ (donc $u = \sum_{k=1}^{p} x_k e_k$).
On définit la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ par la matrice colonne

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

Exemple
Pour $u = (0, 2)$, dans la base canonique $\mathcal{C} = ((1, 0), (0, 1))$, on a $\mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Dans la base $\mathcal{B} = ((1, 1), (-1, 0))$, comme $u = 2(1, 1) + 2(-1, 0)$, on a $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
On pose $\mathcal{D} = ((1, 0), (0, 1))$. $\mathcal{M}at_{\mathcal{D}}(u) =$

Danger ! *Des étourderies fréquentes :*

1. Quand on travaille de manière matricielle, il faudra systématiquement dire dans quelle base on travaille, sinon, les calculs n'auront aucun sens.
2. Lorsque l'on représente les vecteurs sous forme de matrices, on les représente TOUJOURS avec des colonnes.

b) Combinaison linéaire et représentation matricielle

La représentation matricielle conserve les combinaisons linéaires :

Propriété 1

Soient u et v deux vecteurs d'un s.e.v. E muni d'une base $\mathcal{B}$.
Soient λ et μ deux scalaires.
Alors $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\lambda u + \mu v) = \lambda \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u) + \mu \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(v)$

A noter : *Conséquence pratique*

Quand on manipule des vecteurs dans une base fixée, on identifiera parfois les vecteurs et leurs matrices, ce qui permet de travailler en colonne et de rendre les calculs éventuellement plus lisibles.

Exemple :

On veut montrer que $u_1 = (0,1,2)$, $u_2 = (-1,2,3)$ et $u_3 = (1,2,4)$ forment une famille libre.

Dans la base canonique, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ sont les matrices représentant u_1, u_2 et u_3.

Ainsi,

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = (0,0,0) \Leftrightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Le système à résoudre apparaît plus naturellement...

2) Matrice d'une application linéaire

a) Construction

Définition 4

Soit f une application linéaire de E dans F.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ une base de F. Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on note $a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{nk}$ les coordonnées de $f(e_k)$ dans la base $\mathcal{B}'$ de F
On définit alors la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ comme étant la matrice dont les colonnes sont les coordonnées dans $\mathcal{B}'$ des images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$, c'est à dire ici :

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{np} \\ \uparrow & & \uparrow \\ f(e_1) & & f(e_p) \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{ coordonnée sur } e'_1 \\ \leftarrow \text{ coordonnée sur } e'_2 \\ \vdots \\ \leftarrow \text{ coordonnée sur } e'_n \end{matrix}$$

Remarques

1. Les vecteurs sont toujours mis en colonne.
2. si f va de E dans F avec $\dim(E) = p$ et $\dim(F) = n$, on obtient une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ (n lignes, p colonnes) : c'est "inversé" (n en premier).
3. Comme l'image d'une base suffit à définir toute l'application linéaire, on pourra directement définir f à partir de sa matrice dans des bases précisées (souvent les bases canoniques, mais pas que...).
4. Par unicité d'écriture dans les bases, deux applications linéaires qui ont la même matrice dans les même bases sont égales.

Exemples

- Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (x - y, x, 2y)$.
  On peut montrer que f est linéaire et on on a $f(1, 0) = (1, 1, 0)$ et $f(0, 1) = (-1, 0, 2)$.
  La matrice de f dans les bases canoniques est donc

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x, y, z)$ (c'est à dire : $f = Id_{\mathbb{R}^3}$) et $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^3$. Alors la matrice de f dans cette base est

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

  C'est de là que provient l'appellation "matrice identité".
- Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (2x + y + 3z, 2y + 2z, x + y + 2z)$.

b) Calcul via la matrice

Proposition 6

Soient E et F deux e.v. de bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ de matrice représentative A dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
Soit $u \in E$ et X sa matrice dans $\mathcal{B}$
Alors $f(u)$ a pour représentation matricielle AX dans $\mathcal{B}'$.

▷ *Preuve :*

◁

Exemple

Soit f une application linéaire ayant pour représentation matricielle canonique $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Alors $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ et pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z)$ est représenté dans la base canonique par :

Attention :
L'exemple ci dessus fonctionne très bien car on est dans la base canonique. Si la matrice n'est pas donnée dans la base canonique, c'est un peu plus compliqué. On en verra un exemple en TD, mais c'est surtout en spé qu'on traite ce genre de problème de changement de bases....

3) Structure des matrices et lien avec les applications linéaires

a) Linéarité de la représentation

Propriété 2

Soit f et g deux applications linéaires de E dans F et soit λ et μ deux scalaires. Si f est représentée par une matrice A et g par une matrice B (dans les mêmes bases), alors $\lambda f + \mu g$ est représentée par $\lambda A + \mu B$

▷ *Preuve :* Immédiat en calculant les images de la base : $(\lambda f + \mu g)(e_k) = \lambda f(e_k) + \mu g(e_k)$. ◁

Remarque :
On vient de construire un isomorphisme de l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ vers $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. En particulier, ces ensembles sont de même dimension !

b) Composition d'applications

Soient E, F et G des s.e.v de bases respectives $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. On suppose que f est représentée par une matrice A dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et g par une matrice B dans $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$.

Soit $u \in E$ représenté par la matrice X dans $\mathcal{B}$.
Alors $f(u)$ a pour matrice représentative AX dans $\mathcal{B}'$

Enfin, $g(f(u))$, dans la base $\mathcal{B}''$, a pour matrice représentative $B(AX) = (BA)X$.
Le produit matriciel donne donc la composée :

Propriété 3

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ où E, F et G des s.e.v de bases respectives $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$

On suppose que f est représentée par une matrice A dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, et g par une matrice B dans $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$.
Alors $g \circ f$ a pour matrice représentative BA dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}''$.

c) Rang d'une matrice

La "vraie" définition du rang d'une matrice n'est pas celle que l'on a vu lors du chapitre sur les systèmes....

Définition 5

On appelle rang d'une matrice A, noté $\mathrm{rg}(A)$ le rang de l'application linéaire f qui admet A comme matrice représentative (quelles que soient les bases choisies)

Comme le rang de l'application linéaire est également le rang de l'image d'une base, on a immédiatement :

Proposition 7

Le rang d'une matrice A est le rang de la famille de vecteurs dont les coordonnées sont données par les colonnes de A.

En admettant le résultat suivant :

Proposition 8

$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$

on a également :

Proposition 9

Le rang d'une matrice A est aussi le rang de la famille de vecteurs dont les coordonnées sont données par les lignes de A.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Proposition 10

La nouvelle définition de rang d'une matrice correspond avec la définition précédente.

Pour prouver ceci, on commence par montrer le résultat suivant :

Lemme 1

Soit A une matrice échelonnée, c'est à dire de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1p} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2p} \\ 0 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{rr} & \dots & a_{rp} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec pour tout } 1 \leq i \leq r,\ a_{ii} \neq 0$$

Alors $\mathrm{rg}(A) = r$.

▷ *Preuve* : Notons $u_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1p})$, $u_2 = (0, a_{22}, \dots, a_{2p})$, ... , $u_r = (0, \dots, 0, a_{rr}, \dots, a_{rp})$, puis $u_{r+1} = u_{r+2} = \dots = u_n = (0, \dots, 0)$).
(Autrement dit : les u_i sont les lignes de la matrice).

Déterminons le rang de la famille $u_1, u_2, \dots, u_n$.
Clairement, $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_n) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_r)$.

Reste à montrer que la famille $(u_1, u_2, \dots, u_r)$ est libre. Supposons $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i = (0, \dots, 0)$. La première coordonnée de cette somme est $\lambda_1 a_{11}$. Comme $a_{11} \neq 0$, $\lambda_1 = 0$.

La deuxième coordonnée est $\lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22}$, donc $\lambda_2 a_{22} = 0$ (puisque $\lambda_1 = 0$) et enfin $\lambda_2 = 0$.

On continue ainsi, et on arrive à $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$, donc la famille est libre et la matrice est de rang r. ◁

On a donc montré que le rang d'une matrice tel que nous l'avions défini coïncide avec notre nouvelle définition dans les cas des matrices échelonnées. Ce résultat est en fait suffisant pour prouver que cela marche dans le cas général, voir en fin de chapitre.

III Cas particulier des endomorphismes

1) Généralités

Notation

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme, avec E un espace de dimension finie et soit $\mathcal{B}$ une base de E.
On note $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$ (c'est à dire en prenant la même base en départ et arrivée)

Les matrices d'endomorphismes sont des matrices carrées :

Exemple :

- Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (2x + y, 3x + 2y)$ et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
  Alors f a pour matrice :

- Soit $\phi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ définie par $\phi(P(x)) = P'(x)$.
  Déterminons la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$:

2) Automorphismes et matrices

a) Lien avec les matrices inversibles

Théorème 2

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de matrice représentative A.
f est un isomorphisme si et seulement si A est inversible.
Dans ce cas, la matrice de f^{-1} est A^{-1}.

▷ *Preuve* : Si f est un isomorphisme, alors f^{-1} existe et est linéaire.
Notons B la matrice représentative de f^{-1}.
Comme $f \circ f^{-1} = Id_E$ et $f^{-1} \circ f = Id_E$, on a

$$AB = BA = I$$

Donc A est inversible d'inverse B et donc f^{-1} a pour matrice A^{-1}.

Réciproquement, si A est inversible, alors il existe une matrice B tel que $AB = BA = I$.

Notons g l'application dont B est la matrice représentative. Alors $f \circ g$ a pour matrice AB et comme $AB = I$, $f \circ g = Id_E$. De même $g \circ f = Id_E$ et donc f est bijective de bijection réciproque g.

◁

Exemple
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (2x + y, 3x + 2y)$. f admet pour matrice représentative $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
On veut montrer que f est inversible et préciser f^{-1} :

b) Inverser une matrice carrée à gauche (ou à droite) suffit !

Proposition 11

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est à dire une matrice carrée d'ordre n. Supposons qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $BA = I_n$.
Alors A est inversible d'inverse B.

▷ *Preuve :*
Soit E un espace de dimension n (par exemple $\mathbb{K}^n$). Soit f l'endomorphisme de E associé canoniquement à A, et g celui associé à B. f et g sont bien des endomorphismes car A et B sont carrées.
On a $BA = I_n$ donc $g \circ f = Id_E$. Alors pour tout $x, y \in E$, si $f(x) = f(y)$, alors $g(f(x)) = g(f(y))$.
Mais comme $g \circ f = Id_E$, on a donc $x = y$, c'est à dire f injective.
Comme E est de dimension finie, f est donc bijective, et f^{-1} existe. Soit C la matrice de f^{-1}.
On a donc $CA = AC = I_n$, d'où $BA = CA$, et finalement en multipliant par C à droite, on a

$$BAC = CAC, \text{ c'est à dire } B = C$$

Donc B est l'inverse de A. ◁

Remarque :
On peut montrer presque de la même façon que si $AB = I_n$ avec A et B carrées, alors $B = A^{-1}$
En pratique, on utilise très souvent cette propriété, et on insistera toujours sur le fait que A et B sont carrées.

3) Polynômes d'endomorphismes :

a) Puissance d'endomorphisme

Définition 6 (*Rappel*)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $p \in \mathbb{N}$. On définit l'endomorphisme f^p par

$$\begin{cases} f^0 &= id_E \\ f^p &= f \circ f^{p-1} \end{cases}$$

Autrement dit, si $p \geq 1$, $f^p = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{p \text{ fois}}$

Du fait que la composition se traduit matriciellement par le produit, on a immédiatement le résultat suivant :

Propriété 4

Soient E un espace vectoriel de base $\mathcal{B}$, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$.
Alors $Mat_{\mathcal{B}}(f^p) = A^p$

Et on retrouve la formule du binôme pour deux endomorphisme qui commutent :

Proposition 12 (*Binôme de Newton pour les endomorphisme*)

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que $f \circ g = g \circ f$.
Alors

$$(f+g)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f^k \circ g^{p-k}$$

Danger ! *Composition mais pas produit !*

Bien que l'on parle de "puissances" d'endomorphismes, il faut bien avoir conscience qu'il s'agit ici de composition d'applications, pas de produit.
En effet, si f et g sont des endomorphismes de E et si $u \in E$, a priori $f(u)g(u)$ n'a pas de sens, donc l'application fg n'est pas forcément définie.

En particulier, $f^2(u)$ NE VEUT PAS DIRE $f(u)f(u)$, mais bien $f(f(u))$.

Remarquons enfin que f^0 ne vaut pas 1, mais id_E, c'est à dire le neutre pour la composition, et non pas pour le produit....

b) Polynôme d'endomorphisme et polynôme de matrice

Définition 7 (*Polynôme d'endomorphisme*)

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ un polynôme, avec

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E.
On définit $P(f)$ par :

$$P(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k$$

Exemples
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soient $P(x) = 3x^2 - x$ et $Q(x) = x^3 + 4x - 2$
Alors $P(f) =$

et $Q(f) =$

On définit de même :

Définition 8 (*Polynôme de matrice*)

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ un polynôme, avec

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ (avec $p \in \mathbb{N}^*$)
On définit $P(A)$ par :

$$P(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k$$

et le lien entre les deux notions est naturel :

Propriété 5

Soit E un espace vectoriel et soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$. Soit $P \in \mathbb{R}[x]$. Alors

$$Mat_{\mathcal{B}}(P(f)) = P(A)$$

Autrement dit : la matrice de $P(f)$ est donnée par $P(A)$.

▷ *Preuve :* Par calcul direct. ◁

c) Polynômes annulateurs

Définition 9

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E et soit $P \in \mathbb{R}[x]$.
On dit que P est un polynôme annulateur de f si $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Cette définition est immédiatement équivalente à :

Propriété 6

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de base $\mathcal{B}$, et soit $P \in \mathbb{R}[x]$.
P est un polynôme annulateur de f si et seulement si $P(A) = O_n$ où $A = Mat_{\mathcal{B}}(E)$ et $n = \dim(E)$

C'est cette propriété qu'on utilisera le plus souvent pour montrer qu'un polynôme est annulateur de f.

Exercice typique autour des polynômes annulateurs :
Soit f définie par $f(x, y) = (2x + 3y, 4x + y)$ et $P(x) = x^2 - 3x - 10$.

1. Montrer que P est annulateur de f.
2. En déduire que f est un isomorphisme et préciser f^{-1}
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de x^n par $P(x)$ pour tout $n \geq 2$.
4. En déduire f^n.

IV Complément autour du rang

Il s'agit de faire le lien entre les différentes notions. Si les démonstrations ne sont aucunement exigibles, les résultats le sont.

1) Effet de la composition sur le rang

Proposition 13 (*hors programme*)

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et $\psi \in \mathcal{L}(F)$ des automorphismes (c'est à dire des applications linéaires bijectives).
Le rang de f est conservé par composition :

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f \circ \varphi) = \mathrm{rg}(\psi \circ f)$$

▷ *Preuve :*

◁

2) Conséquence sur l'étude des matrices et des systèmes

a) Système et rang...

Définition 10

Le rang d'un système d'équation linéaire est le rang de la matrice associé

Proposition 14

Tout système est équivalent à un système echelonné via le pivot de Gauss

Les opérations effectuées lors du pivot de Gauss sont toutes des opérations linéaires et bijectives (on effectue des combinaisons linéaires de lignes avec des coefficients non nuls) : en regardant le résultat sur la matrice et en voyant celle-ci comme une application linéaire, chaque opération effectuée via le pivot de Gauss revient à composer à gauche ou à droite par un automorphisme, donc le rang n'est pas changé !
Conclusion :

Proposition 15

Le rang n'est pas modifié par la méthode du pivot de Gauss, quelles que soient les opérations élémentaires effectuées dans cette méthode. En particulier, nos deux définitions de rang d'une matrice sont bien équivalents.

b) Exemple de résultat liant les concepts

Proposition 16

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ p vecteurs d'un espace de dimension finie E.
Soit A la matrice dont les colonnes représentent les vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_p$.
Soit S un système de matrice associée A. Soit f une application linéaire associée à A.
On a les résultats suivants :

1. $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(S) = \mathrm{rg}(f)$
2. *$\mathcal{F}$ est base de $E \Leftrightarrow$ A est inversible $\Leftrightarrow$ f est un isomorphisme.*